E.S.E.O. - E.S.T.I.T. - H.E.I. - I.S.E.N. - I.S.E.P.

CONCOURS D'ENTREE EN 1re ANNEE DU CYCLE INGENIEURS 1988

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES Série M

Samedi 14 Mai 1988 de 8 h à 12 h

ATTENTION : Votre copie est destinée à être corrigée et notée. Il sera tenu compte de la qualité de la présentation et de l'orthographe.

Une matrice à coefficients complexes de dimension (p,n) (p lignes, n colonnes) d'élément général a_{ij}, est dite binaire si et seulement si les seules valeurs possibles pour a_{ij} sont 0 et 1.

Le problème étudie certaines propriétés des matrices binaires.

Partie I

Une matrice binaire A est une matrice d'arrangement si et seulement si chaque ligne contient un élément et un seul valant 1. On notera $\mathcal{A}(p,n)$ l'ensemble des matrices d'arrangement à p lignes et n colonnes.

1°) Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Montrer que : A appartient à $\mathcal{A}(p,n)$ si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

i) $\forall i, \forall j \quad a_{ij}(1 - a_{ij}) = 0$; ii) $\forall i \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$.

2°) Décrire les ensembles $\mathcal{A}(1,1)$, $\mathcal{A}(1,2)$, $\mathcal{A}(2,1)$ et $\mathcal{A}(2,2)$.

3°) Déterminer le nombre d'éléments de $\mathcal{A}(p,n)$.

4°) Montrer que : $A \in \mathcal{A}(p,n)$ et $B \in \mathcal{A}(n,q)$ implique $A.B \in \mathcal{A}(p,q)$.

Partie II Une matrice d'arrangement est appelée matrice d'arrangement sans répétition si et seulement si chaque colonne contient au plus un élément valant 1. On notera $\mathcal{B}(p,n)$ l'ensemble des matrices d'arrangement sans répétition à p lignes et n colonnes.

1°) Soit $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Montrer que : B appartient à $\mathcal{B}(p,n)$ si et seulement si les 3 propriétés suivantes sont vérifiées :

i) $\forall i, \forall j \quad a_{ij}(1 - a_{ij}) = 0$; ii) $\forall i \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$;

iii) $\forall j \quad \sum_{i=1}^{p} a_{ij} \leq 1$.

T.s.v.p.

2°) Décrire les ensembles $\mathcal{B}(2,2)$, $\mathcal{B}(2,3)$, $\mathcal{B}(3,2)$ et $\mathcal{B}(3,3)$.

3°) Montrer que si : $p > n$, alors : $\mathcal{B}(p,n) = \emptyset$.

4°) Déterminer le nombre d'éléments de $\mathcal{B}(p,n)$.

Partie III

Si A est une matrice carrée, on note det(A) le déterminant de la matrice A.

1°) Pour $A \in \mathcal{A}(n,n)$, montrer que l'on a :
$$[\det(A)].[1 - \det(A)].[1 + \det(A)] = 0.$$

2°) Etablir que pour $A \in \mathcal{A}(n,n)$: $\det(A) \neq 0 \iff A \in \mathcal{B}(n,n)$.

3°) Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}(n,n)$ muni de la multiplication des matrices forme un sous-groupe du groupe orthogonal d'ordre n. Ce sous-groupe est-il commutatif ?

Partie IV

1°) Vérifier que 1 est valeur propre de tout élément de $\mathcal{A}(n,n)$.

2°) Montrer que 0 est valeur propre de tout élément de $\mathcal{A}(n,n)$ qui n'appartient pas à $\mathcal{B}(n,n)$.

3°) Montrer que si λ est valeur propre réelle ou complexe d'un élément de $\mathcal{A}(n,n)$ alors : $|\lambda| \leq 1$.

4°) Montrer que si λ est valeur propre réelle ou complexe d'un élément de $\mathcal{B}(n,n)$ alors : $|\lambda| = 1$.

Partie V

Sur l'ensemble $\mathcal{B}(p,n)$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$B_1 \mathcal{R} B_2 \iff \exists C \in \mathcal{B}(p,p),\ B_1 = C.B_2 .$$

1°) Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2°) Déterminer le cardinal de chaque classe d'équivalence puis le nombre de classes.

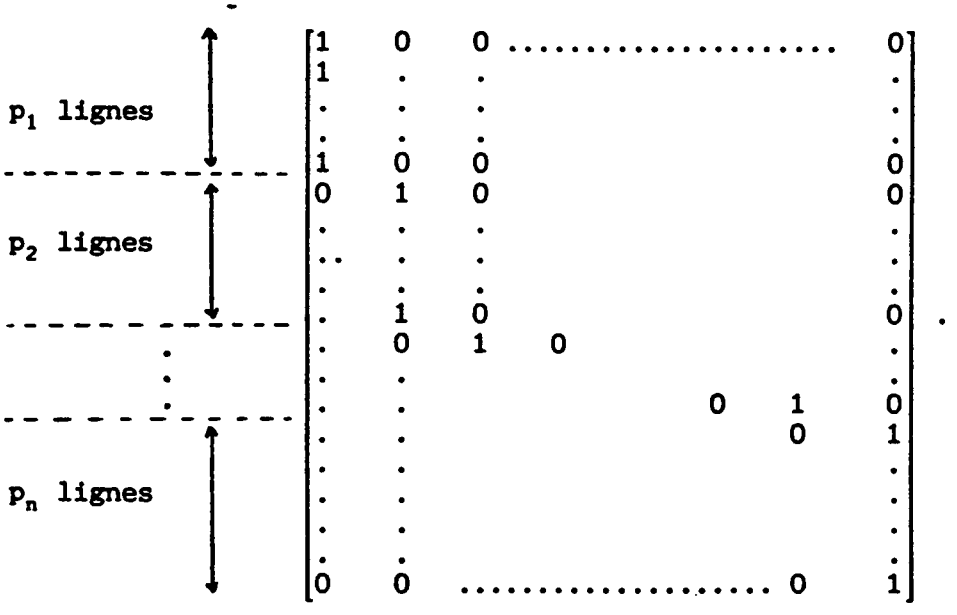
Partie VI

On suppose que : $p \geqslant n$.

Pour tout $M \in \mathcal{A}(p,n)$ de rang n, on pose :

$$\mathcal{D}(M) = \{D \in \mathcal{A}(p,n) \mid \exists\, P \in \mathcal{B}(p,p),\ D = P.M\}.$$

Si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont n entiers non nuls vérifiant : $p_1 + \ldots + p_n = p$ alors $C(p_1, p_2, \ldots, p_n ; n)$ désigne la matrice de dimension (p,n) suivante :



1°) Montrer que toute matrice $C(p_1, p_2, \ldots, p_n ; n)$ est un élément de $\mathcal{A}(p,n)$ de rang n.

2°) Soit $A \in \mathcal{A}(p,n)$ de rang n.
Montrer qu'il existe un élément $(p_1, p_2, \ldots, p_n, B_1)$ appartenant à $(\mathbb{N}^*)^p \times \mathcal{B}(p,p)$ vérifiant : $\sum_{i=1}^{n} p_i = p$ et $A = B_1 . C(p_1, \ldots, p_n ; n)$.

En déduire que : $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(C(p_1, \ldots, p_n ; n))$.

3°) Soit $p_1, p_2, \ldots, p_n$ n entiers non nuls vérifiant : $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = p$.
On définit sur $\mathcal{B}(p,p)$ la relation binaire $\mathcal{C}$ par :

$B_1 \mathcal{C} B_2 \iff B_1 . C(p_1, \ldots, p_n ; n) = B_2 . C(p_1, \ldots, p_n ; n)$.

a) Etablir que $\mathcal{C}$ est une relation d'équivalence.

b) Déterminer le cardinal de chaque classe d'équivalence puis le nombre de classes.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail